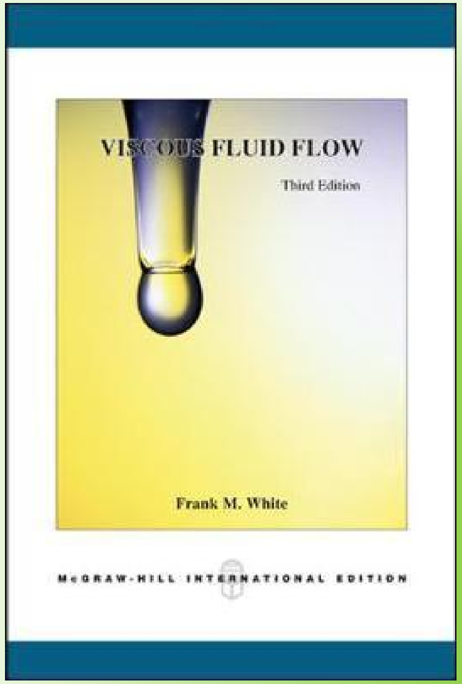


مکانیک سیالات پیشرفته

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

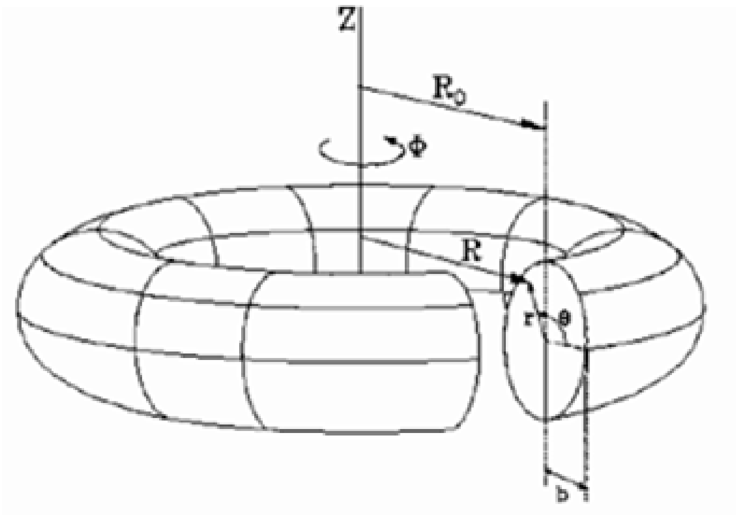
بخش دوم از مباحث فصل دوم:
معادلات بقا در سایر دستگاه های متعامد

کلاس درس دکتر نوروزی
فروردین ۱۴۰۰

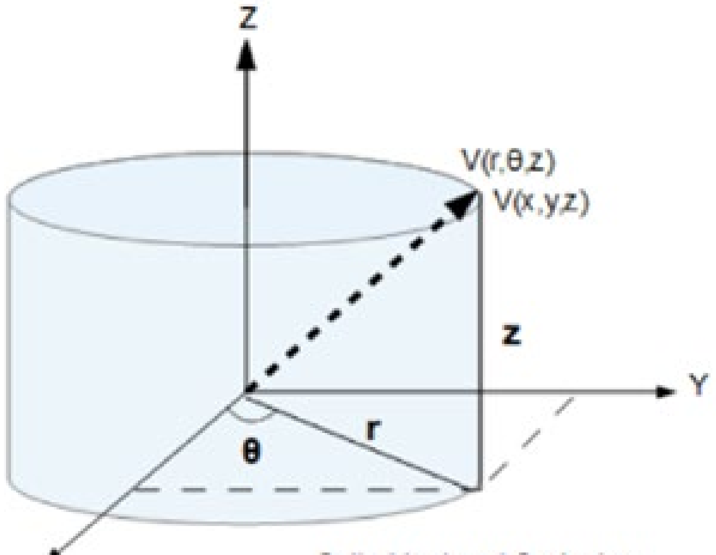
دستگاههای مختصات متعامد

دستگاه مختصات متعامد: دستگاهی است که در آن بردار یکه های جهات مختلف مختصات بر یکدیگر عمودند.

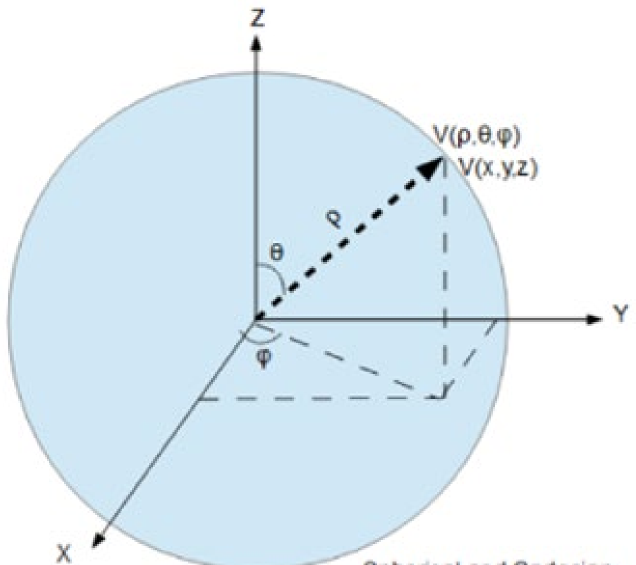
در چنین دستگاهی ضرب داخلی بردار یکه های دو جهت متفاوت همواره صفر است: $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0, \;\; i \neq j$



Toroidal Coordinate System



Cylindrical and Cartesian

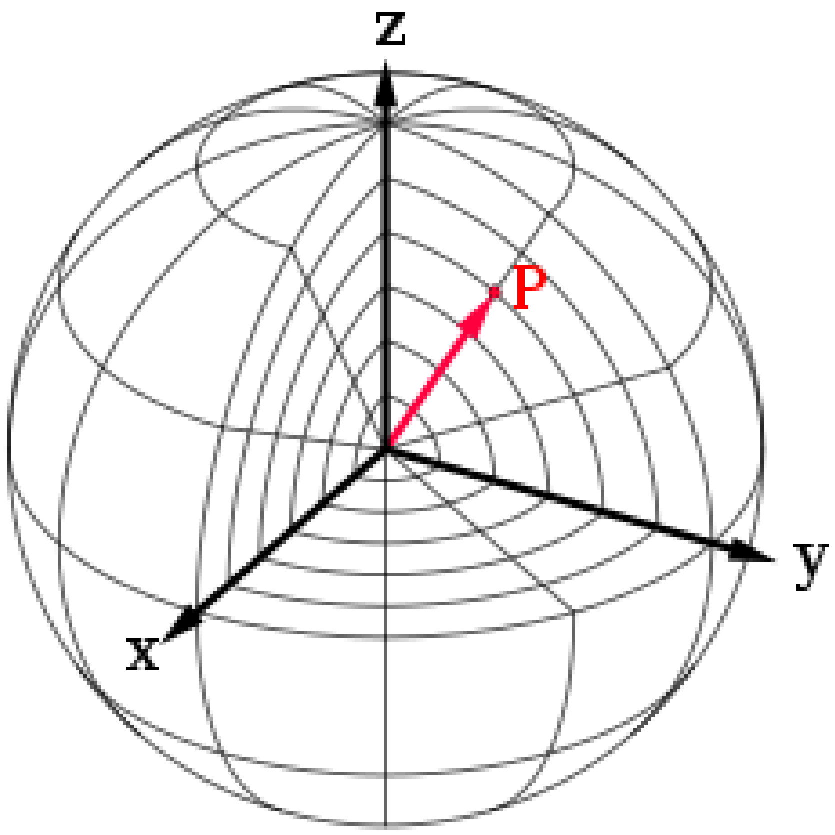


Spherical and Cartesian

جهت مطالعه بیشتر در خصوص سایر انواع دستگاههای مختصات متعامد به لینک زیر مراجعه نمایید:

https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_coordinates

معادلات ناویر استوکس در سایر دستگاههای مختصات متعامد



در برخی مسائل دارای هندسه خاص، مانند جریان در داخل لوله ها، جریان بین استوانه های چرخان، جریان حول سیلندر، جریان حول کره و ... استفاده از سایر دستگاههای مختصات متعامد نظیر مختصات استوانه ای و مختصات کروی سبب سهولت در آنالیز تحلیلی و عددی مسائل می شود. زیرا با استفاده از دستگاه مختصات مناسب، اعمال شرایط مرزی آسانتر خواهد بود. همچنین بعضی روشهای کلاسیک ریاضی برای حل معادلات PDE مانند روش جداسازی متغیرها در دستگاههای مختصات متعامد قابل بکارگیری است و نیز تولید شبکه و گسسته سازی معادلات حاکم در این دستگاهها معمولا بسیار آسانتر است. چندین روش برای استخراج این معادلات وجود دارد که دو مورد از متداولترین آنها عبارتند از:

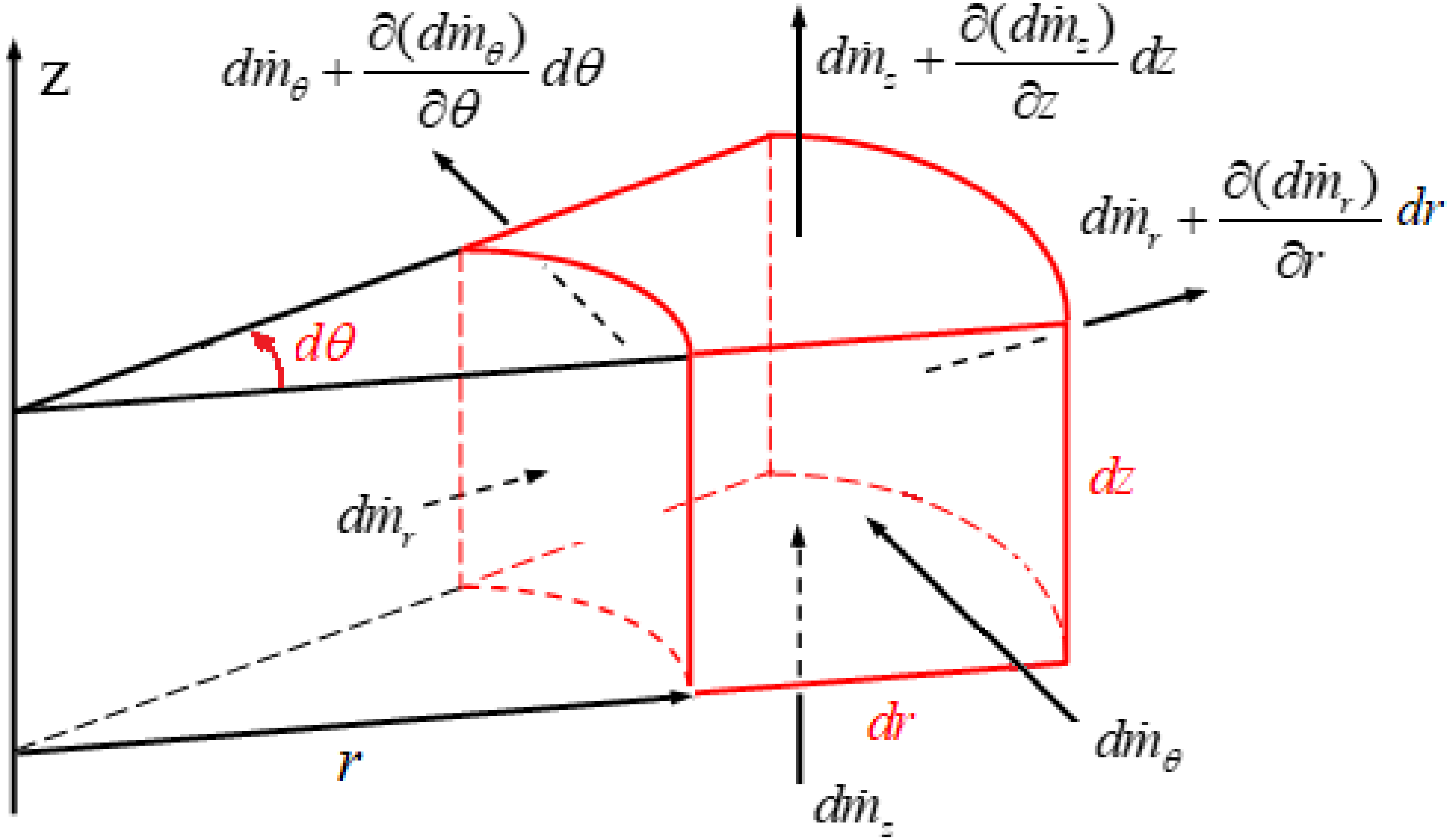
۱- استخراج معادلات برای یک حجم کنترل دیفرانسیلی در دستگاه مختصات مربوطه

۲- بدست آوردن معادلات با استخراج عملگرها در مختصات مربوطه

معادلات ناویر استوکس در دستگاه مختصات استوانه ای

روش اول: استخراج معادله پیوستگی (قانون بقا جرم) با استفاده از المان گیری

در شکل دبی های جرمی ورودی و خروجی به یک حجم کنترل دیفرانسیلی در دستگاه مختصات استوانه ای نشان داده است.



ادامه اثبات معادله پیوستگی (قانون بقا جرم) با استفاده از المان گیری:

روابط مربوط به دبی های جرمی و نیز المانهای سطح و حجم عبارتند از:

$$d\dot{m}_{in,r} = d\dot{m}_r = \rho v_r dA_r\,, \quad d\dot{m}_{out,r} = d\dot{m}_r + \frac{\partial(d\dot{m}_r)}{\partial r}dr,$$

$$d\dot{m}_{in,\theta} = d\dot{m}_\theta = \rho v_\theta dA_\theta\,, \quad d\dot{m}_{out,\theta} = d\dot{m}_\theta + \frac{\partial(d\dot{m}_\theta)}{\partial \theta}d\theta,$$

$$d\dot{m}_{in,z} = d\dot{m}_z = \rho v_z dA_z\,, \quad d\dot{m}_{out,z} = d\dot{m}_z + \frac{\partial(d\dot{m}_z)}{\partial z}dz, \qquad (۱)$$

$$dA_r = rd\theta dz, \qquad dA_\theta = drdz, \qquad dA_z = rd\theta dr,$$

$$d\forall = rd\theta drdz$$

ادامه اثبات: مشابه بحث جلسه گذشته، از قضیه انتقال رینولدز برای قانون بقای جرم در یک حجم کنترل دیفرانسیلی داریم:

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{syst} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \beta\rho d\forall + \int_{CS} \beta\rho\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\right)dA$$

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{syst} = 0, \quad B = m \quad \& \quad \beta = \frac{dB}{dm} = 1$$

$$\rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}d\forall + \sum d\dot{m}_{out} - \sum d\dot{m}_{in} = 0 \qquad (۲)$$

با قرار دادن مقادیر مربوط به دبی های جرمی ورودی و خروجی از رابطه (۱) در رابطه (۲)، داریم:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}d\forall + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho v_r dA_r\right)dr + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho v_\theta dA_\theta\right)d\theta + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho v_z dA_z\right)dz = 0 \qquad (۳)$$

حال بایستی مقادیر المانهای سطح و حجم را از رابطه (۱) در رابطه (۳) قرار دهیم:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}rd\theta drdz + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho v_r rd\theta dz\right)dr + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho v_\theta drdz\right)d\theta + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho v_z rd\theta dr\right)dz = 0 \qquad (۴)$$

ادامه اثبات: در ترم دوم رابطه (۴) باید از قاعده مشتق ضرب توابع استفاده شود، پس:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}rd\theta drdz+\frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r)rd\theta dzdr+\rho v_r drd\theta dz \qquad (۵)$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta)drdzd\theta+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)rd\theta drdz=0$$

در نهایت با تقسیم کردن طرفین به حجم المان (یعنی $rd\theta drdz$)، **معادله پیوستگی جریان تراکم پذیر در دستگاه مختصات استوانه ای** بدست می آید:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\rho v_z}{\partial z}+\frac{\rho v_r}{r}=0 \qquad (۶)$$

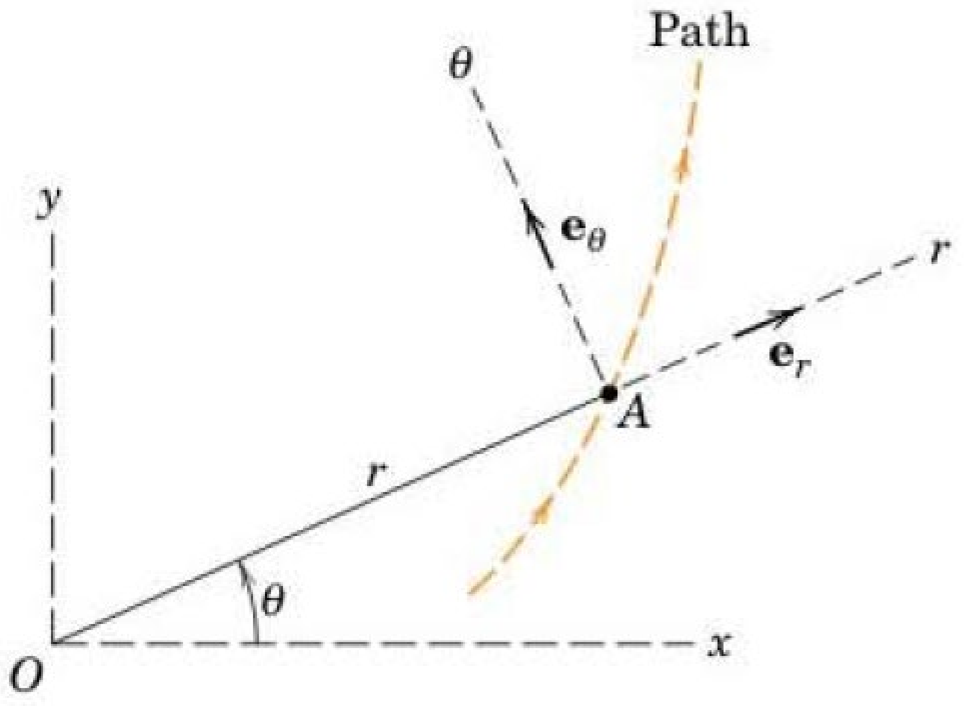
همچنین از رابطه (۶)، برای **جریان تراکم ناپذیر در مختصات استوانه ای** ($\rho=cte$) داریم:

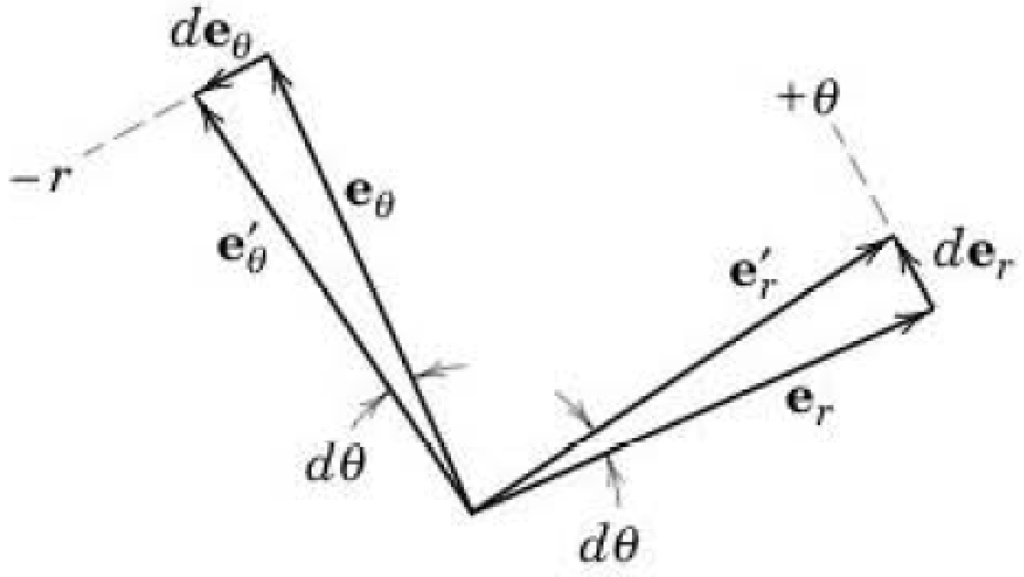
$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0 \qquad (۷)$$

روش دوم: استخراج معادله پیوستگی (قانون بقا جرم) با استفاده از محاسبه عملگرها در مختصات استوانه ای

بطور کلی برخی از بردارهای یکه دستگاههای مختصات ممکن است که دارای مشتق (دیفرانسیل) باشند. این مشتق (دیفرانسیل) به دلیل تغییر جهت آن بردار یکه بوجود می آید. با توجه به این نکته که طول بردارهای یکه برابر یک واحد است، با چرخش در جهت θ، بردارهای یکه در جهات r و θ دستگاه مختصات استوانه ای دارای دیفرانسیل بصورت زیر خواهند بود:

$$d\hat{e}_r = d\theta\hat{e}_\theta \quad \& \quad d\hat{e}_\theta = -d\theta\hat{e}_r \tag{۸}$$





ادامه اثبات: در جلسه گذشته نشان دادیم که معادله پیوستگی جریان تراکم ناپذیر بر حسب عملگر دیورژانس قابل بیان است:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad (۹)$$

لذا اگر عملگر دیورژانس سرعت را در دستگاه مختصات استوانه ای بیابیم، از رابطه فوق به معادله پیوستگی در دستگاه مختصات استوانه ای خواهیم رسید. به سادگی می توان دریافت که عملگر گرادیان در دستگاه مختصات استوانه ای به شکل زیر است:

$$\nabla() = \frac{\partial()}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial()}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial()}{\partial z}\hat{e}_z \qquad (۱۰)$$

لذا برای دیورژانس سرعت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla() = \dfrac{\partial()}{\partial r}\hat{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial()}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \dfrac{\partial()}{\partial z}\hat{e}_z \\ \mathbf{V} = \quad v_r\hat{e}_r \quad + \quad v_\theta\hat{e}_\theta \quad + \quad v_z\hat{e}_z \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} = {} & \frac{\partial}{\partial r}\left(v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta + v_z\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_r + \\ & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta + v_z\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_\theta + \\ & \frac{\partial}{\partial z}\left(v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta + v_z\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_z \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

ادامه اثبات: بایستی توجه داشت که بردارهای یکه $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ فقط نسبت به جهت θ دارای مشتق هستند. بنابراین از قاعده مشتق ضرب توابع، مشتقات رابطه (۱۱) به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{e}_\theta+\frac{\partial v_z}{\partial r}\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_r+$$
$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\hat{e}_r+v_r\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\hat{e}_\theta+v_\theta\frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_\theta \qquad (۱۲)$$
$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\hat{e}_r+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\hat{e}_\theta+\frac{\partial v_z}{\partial z}\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_z$$

با جایگذاری مشتقات بردارهای یکه $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ نسبت به جهت θ از رابطه (۸)، در رابطه (۱۲) داریم:

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{e}_\theta+\frac{\partial v_z}{\partial r}\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_r+$$
$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\hat{e}_r+v_r\hat{e}_\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\hat{e}_\theta-v_\theta\hat{e}_r+\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_\theta \qquad (۱۳)$$
$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\hat{e}_r+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\hat{e}_\theta+\frac{\partial v_z}{\partial z}\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_z$$

با مرتب کردن معادله (۱۳)، داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial r}\hat{e}_z \right)\cdot \hat{e}_r + \frac{1}{r}\left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right)\hat{e}_r + \left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)\hat{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial \theta}\hat{e}_z \right)\cdot \hat{e}_\theta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\hat{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\hat{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z}\hat{e}_z \right)\cdot \hat{e}_z \qquad (۱۴)$$

با عنایت به اینکه دستگاه مختصات استوانه ای متعامد است، لذا ضرب داخلی دو بردار یکه متفاوت صفر است. همچنین بدیهی است که ضرب داخلی دو بردار یکه یکسان برابر عدد یک است. لذا با محاسبه ضربهای داخلی در رابطه (۱۴) داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \qquad (۱۵)$$

با توجه رابطه (۹)، در معادله پیوستگی جریان تراکم ناپذیر دیورژانس سرعت برابر صفر است، بنابراین برای این معادله داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \longrightarrow \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \qquad (۱۶)$$

همچنین با عنایت به رابطه (۱۵) برای دیورژانس در دستگاه استوانه ای، برای معادله معادله پیوستگی جریان تراکم پذیر داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\rho v_r}{r} = 0 \qquad (۱۷)$$

استخراج معادله بقای مومنتوم در دستگاه مختصات استوانه ای

اثبات معادله مومنتوم نیز به هر دو روش المان گیری و نیز استخراج حاصل عملگرها در مختصات مورد نظر، امکان پذیر است. در ادامه، این اثبات به کمک **ترکیبی از هر دو روش** آمده است. پیشتر نشان دادیم که معادله بقای مومنتوم جریان تراکم ناپذیر به صورت زیر قابل بیان است:

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V} \qquad (۱۸)$$

معادله فوق دارای جملات متعددی است که هر یک از عملگرهای آن باید در دستگاه مختصات استوانه ای محاسبه شوند. در ادامه برخی از این جملات به کمک عملگر و یک جمله به کمک از المان گیری محاسبه شده است. برای جمله مشتق مادی سرعت (شتاب مادی) به روش **استخراج عملگر** داریم:

$$\mathbf{V}=v_r\hat{e}_r+v_\theta\hat{e}_\theta+v_z\hat{e}_z$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{dv_r}{dt}\hat{e}_r+v_r\frac{d\hat{e}_r}{dt}+\frac{dv_\theta}{dt}\hat{e}_\theta+v_\theta\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}+\frac{dv_z}{dt}\hat{e}_z \qquad (۱۹)$$

از رابطه (۸) داریم:

$$d\hat{e}_r=d\theta\hat{e}_\theta \longrightarrow \frac{d\hat{e}_r}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta \xrightarrow{v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}} \frac{d\hat{e}_r}{dt}=\frac{v_\theta}{r}\hat{e}_\theta$$

$$d\hat{e}_\theta=-d\theta\hat{e}_r \longrightarrow \frac{d\hat{e}_\theta}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_r \xrightarrow{v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt}=-\frac{v_\theta}{r}\hat{e}_r \qquad (۲۰)$$

با جایگذاری مشتق بردار یکه ها از رابطه (۲۰) در رابطه (۱۹) نتیجه می شود:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{dv_r}{dt}\hat{e}_r+\frac{v_rv_\theta}{r}\hat{e}_\theta+\frac{dv_\theta}{dt}\hat{e}_\theta-\frac{v_\theta^{\,2}}{r}\hat{e}_r+\frac{dv_z}{dt}\hat{e}_z \qquad (۲۱)$$

ادامه اثبات معادله مومنتوم: در نهایت از رابطه (۲۱)، مشتق مادی سرعت بدست می آید:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\left(\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^{\ 2}}{r}\right)\hat{e}_r+\left(\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)\hat{e}_\theta+\frac{Dv_z}{Dt}\hat{e}_z \qquad (۲۲)$$

بایستی توجه داشت که سرعت یک کمیت برداری است. ترمهای مشتق مادی مولفه های سرعت داخل رابطه فوق به سادگی از رابطه ای مشابه رابطه زیر برای کمیت میدانی $Q=Q(t,r,\theta,z)$ قابل محاسبه هستند:

$$dQ=\frac{\partial Q}{\partial t}dt+\frac{\partial Q}{\partial r}dr+\frac{\partial Q}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial Q}{\partial z}dz$$

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (۲۳)$$

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{DQ}{Dt}=\frac{\partial Q}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla Q=\frac{\partial Q}{\partial t}+v_r\frac{\partial Q}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial Q}{\partial z}$$

در معادله مومنتوم (رابطه (۱۸))، ترمهای شتاب گرانش و گرادیان فشار نیز به سادگی به صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\mathbf{g}=g_r\hat{e}_r+g_\theta\hat{e}_\theta+g_z\hat{e}_z \qquad (۲۴)$$

$$\nabla p=\frac{\partial p}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{e}_\theta+\frac{\partial p}{\partial z}\hat{e}_z \qquad (۲۵)$$

ادامه اثبات: حال فقط جمله لاپلاسین سرعت در معادله مومنتوم (رابطه (۱۸)) باقی مانده است. همانگونه که در جلسه قبل نشان دادیم **حاصلضرب لاپلاسین سرعت در ویسکوزیته برابر با برآیند نیروهای ویسکوز بر واحد حجم المان** است:

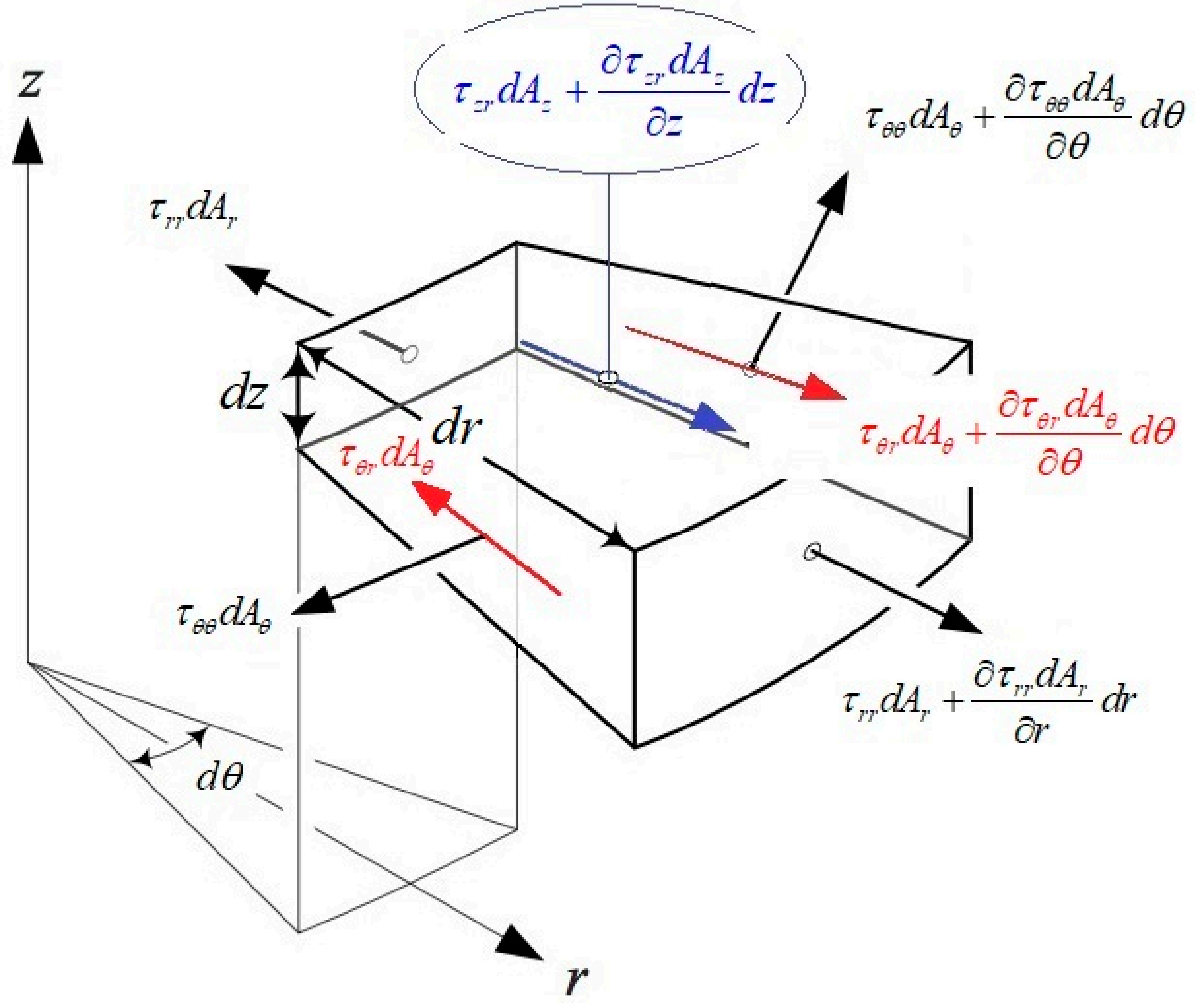
$$\frac{\sum d\mathbf{F}_{visc}}{d\forall} = \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} = \mu\nabla^2\mathbf{V} \qquad (۲۶)$$

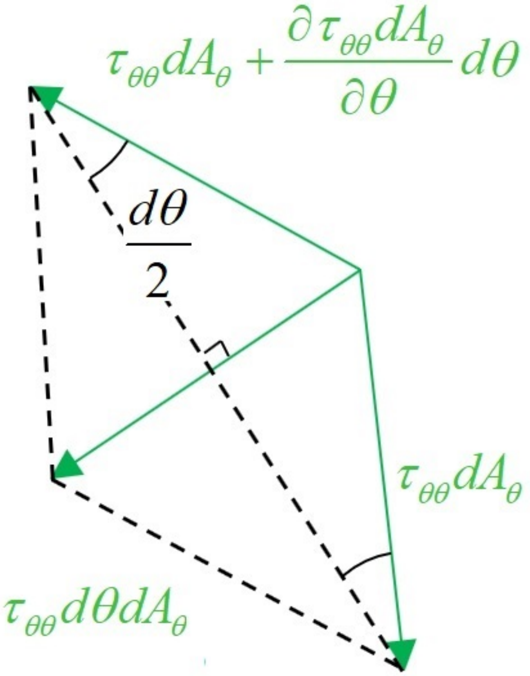
رابطه فوق، یک رابطه برداری بوده و دارای سه مولفه در مختصات استوانه ای است. در ادامه، محاسبه این ترم به **روش المان گیری** برای جهت r آمده و دو مولفه دیگر بطریق مشابه محاسبه می شوند. در شکل اسلاید بعدی مولفه های تنش موثر در جهت r روی المان استوانه ای نشان داده شده اند. با توجه به شکل برای برآیند نیروهای ویسکوز در جهت r داریم:

$$\frac{\sum dF_{visc,r}}{d\forall} = \frac{1}{d\forall}\left(\frac{\partial\tau_{rr}dA_r}{\partial r}dr + \frac{\partial\tau_{r\theta}dA_\theta}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\tau_{rz}dA_z}{\partial z}dz - \tau_{\theta\theta}d\theta dA_\theta\right) \qquad (۲۷)$$

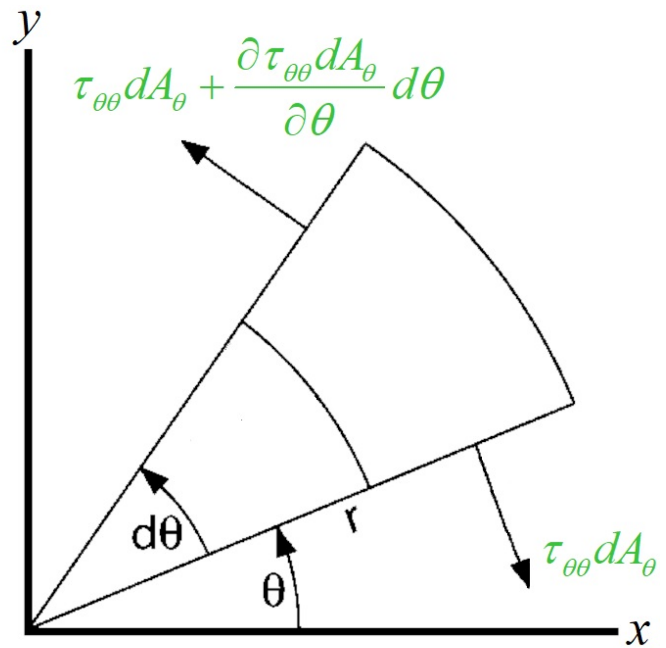
با توجه به تصاویر سمت راست اسلاید بعدی، علاوه بر مشتقات تنش، مولفه تنش $\tau_{\theta\theta}$ دارای تصویری در خلاف جهت r است که اثر نیروی آن در این شکل و نیز معادله تعادل نیروها با رنگ سبز نشان داده شده است. با جایگذاری مقادیر دیفرانسیل مساحت از رابطه (۱) در رابطه (۲۷) داریم:

$$\frac{\sum dF_{visc,r}}{d\forall} = \frac{1}{d\forall}\left(\frac{\partial\tau_{rr}rd\theta dz}{\partial r}dr + \frac{\partial\tau_{r\theta}drdz}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\tau_{rz}rd\theta dr}{\partial z}dz - \tau_{\theta\theta}d\theta drdz\right) \qquad (۲۸)$$





$$2\tau_{\theta\theta} \sin\frac{d\theta}{2} dA_\theta = \tau_{\theta\theta} d\theta dA_\theta$$



ادامه اثبات: برای محاسبه اولین ترم سمت راست معادله (۲۸) که با رنگ صورتی نشان داده شده بایستی توجه داشت که باید از قاعده مشتق ضرب استفاده شود. درنهایت با محاسبه مشتقات و درج مقدار دیفرانسیل حجم ($d\forall = r dr d\theta dz$) در معادله (۲۸) داریم:

$$\frac{\sum dF_{visc,r}}{d\forall} = \frac{1}{r dr d\theta dz}\left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} r d\theta dz dr + \tau_{rr} d\theta dz dr + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} dr dz d\theta + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} r d\theta dr dz - \tau_{\theta\theta} d\theta dr dz\right) \qquad (۲۹)$$

در نهایت با ساده کردن معادله (۲۹) و با توجه به معادله (۲۶) داریم:

$$\frac{\sum dF_{visc,r}}{d\forall} = \left\{\nabla^2 \mathbf{V}\right\}_r = \left\{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\right\}_r = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \qquad (۳۰)$$

به طور مشابه با در نظر گرفتن مولفه های تنش موثر در نیرو در جهات θ و z اثبات می شود:

$$\frac{\sum dF_{visc,\theta}}{d\forall} = \left\{\nabla^2 \mathbf{V}\right\}_\theta = \left\{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\right\}_\theta = \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} \qquad (۳۱)$$

$$\frac{\sum dF_{visc,z}}{d\forall} = \left\{\nabla^2 \mathbf{V}\right\}_z = \left\{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\right\}_z = \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} \qquad (۳۲)$$

شایان ذکر است که روابط (۳۰) تا (۳۲) **معرف مولفه های دیورژانس یک تانسور مرتبه دوم در مختصات استوانه ای** هستند. برای محاسبه نهایی لاپلاسین سرعت از روابط (۳۰) تا (۳۲)، لازم است که مولفه های تانسور تنش در مختصات استوانه ای محاسبه شوند. همانطور که در فصل اول گفته شد، برای یک سیال نیوتنی می توان تانسور تنش را از رابطه ($\boldsymbol{\tau} = \mu\dot{\gamma} = \mu(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T)$) بدست آورد. پس نیازمند **یافتن تانسور گرادیان سرعت در مختصات استوانه ای** هستیم تا بتوانیم روابط **مولفه های تنش** در این مختصات را بدست آوریم.

ادامه اثبات: در ادامه محاسبه تانسور گرادیان سرعت در مختصات استوانه ای به روش استفاده از **عملگرها** آمده است. به عنوان مقدمه لازم است که معرفی در خصوص ضرب تانسوری (tensor product) داشته باشیم. ضرب تانسوری با نماد $\otimes$ نشان داده می شود و حاصل این ضرب برای دو بردار دلخواه U و V برابر است با:

$$U=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\vdots\\u_n\end{Bmatrix}\ \&\ V=\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\\vdots\\v_m\end{Bmatrix}\longrightarrow U\otimes V=UV^T=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\vdots\\u_n\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_m\end{Bmatrix} \tag{۳۳}$$

بنابراین داریم:

$$U\otimes V=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\vdots\\u_n\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_m\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \dots & u_1v_m\\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \dots & u_2v_m\\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \dots & u_3v_m\\ \vdots & & & \ddots & \\ u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \dots & u_nv_m\end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

ادامه اثبات: از رابطه (۳۴) می توان دریافت که ضرب تانسوری دو بردار یکه مربوط به یک فضای سه بعدی، به یک مولفه از یک تانسور مرتبه دوم دلالت می کند:

$$\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j = e_{ij} \qquad (۳۵)$$

که اندازه e_{ij} برابر با مقدار واحد است. به عبارت دیگر حاصل این ضرب ماتریسی ۳*۳ است که تمام عناصر آن صفر است بجز درایه شماره ij آن که برابر با مقدار واحد است. برای مثال، در یک فضای سه بعدی، ضرب تانسوری $\hat{e}_2$ و $\hat{e}_3$ برابر است با:

$$\hat{e}_2 \otimes \hat{e}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۳۶)$$

همچنین بایستی توجه داشت که در ضرب تانسوری ترتیب ضرب مهم است. به عبارت دیگر:

$$\hat{e}_2 \otimes \hat{e}_3 \neq \hat{e}_3 \otimes \hat{e}_2 \qquad (۳۷)$$

حال می توان با استفاده از این ضرب، تعریف جامع تری از گرادیان یک بردار ارائه نمود:

$$\nabla \mathbf{V} = \nabla \otimes \mathbf{V} \qquad (۳۸)$$

ادامه اثبات: برای نمونه در دستگاه مختصات کارتزین داریم:

$$\nabla\mathbf{V}=\nabla\otimes\mathbf{V}=\left\{\hat{e}_1\frac{\partial}{\partial x}+\hat{e}_2\frac{\partial}{\partial y}+\hat{e}_3\frac{\partial}{\partial z}\right\}\otimes\{u\hat{e}_1+v\hat{e}_2+w\hat{e}_3\}=$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}\hat{e}_1\otimes\hat{e}_1+\frac{\partial v}{\partial x}\hat{e}_1\otimes\hat{e}_2+\frac{\partial w}{\partial x}\hat{e}_1\otimes\hat{e}_3+\\&\frac{\partial u}{\partial y}\hat{e}_2\otimes\hat{e}_1+\frac{\partial v}{\partial y}\hat{e}_2\otimes\hat{e}_2+\frac{\partial w}{\partial y}\hat{e}_2\otimes\hat{e}_3+\\&\frac{\partial u}{\partial z}\hat{e}_3\otimes\hat{e}_1+\frac{\partial v}{\partial z}\hat{e}_3\otimes\hat{e}_2+\frac{\partial w}{\partial z}\hat{e}_3\otimes\hat{e}_3+\end{aligned} \qquad (۳۹)$$

لذا برای گرادیان سرعت نتیجه می شود:

$$\nabla\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial w}{\partial x}\\\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial v}{\partial y}&\frac{\partial w}{\partial y}\\\frac{\partial u}{\partial z}&\frac{\partial v}{\partial z}&\frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix} \qquad (۴۰)$$

ادامه اثبات: به همین شکل برای گرادیان سرعت در دستگاه مختصات استوانه ای داریم:

$$
\begin{aligned}
\nabla\mathbf{V} = \nabla\otimes\mathbf{V} = & \left\{\hat{e}_r\frac{\partial(\,)}{\partial r}+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial(\,)}{\partial\theta}+\hat{e}_z\frac{\partial(\,)}{\partial z}\right\}\otimes\{v_r\hat{e}_r+v_\theta\hat{e}_\theta+v_z\hat{e}_z\}= \\
& \hat{e}_r\otimes\frac{\partial(v_r\hat{e}_r)}{\partial r}+\hat{e}_r\otimes\frac{\partial(v_\theta\hat{e}_\theta)}{\partial r}+\hat{e}_r\otimes\frac{\partial(v_z\hat{e}_z)}{\partial r}+ \\
& \hat{e}_\theta\otimes\frac{1}{r}\frac{\partial(v_r\hat{e}_r)}{\partial\theta}+\hat{e}_\theta\otimes\frac{1}{r}\frac{\partial(v_\theta\hat{e}_\theta)}{\partial\theta}+\hat{e}_\theta\otimes\frac{1}{r}\frac{\partial(v_z\hat{e}_z)}{\partial\theta}+ \\
& \hat{e}_z\otimes\frac{\partial(v_r\hat{e}_r)}{\partial z}+\hat{e}_z\otimes\frac{\partial(v_\theta\hat{e}_\theta)}{\partial z}+\hat{e}_z\otimes\frac{\partial(v_z\hat{e}_z)}{\partial z}
\end{aligned}
\qquad (۴۱)
$$

در رابطه فوق، مشتق بردار یکه های عبارات قرمز رنگ صفر نیست و باید از رابطه مشتق ضرب دو عبارت محاسبه شوند:

$$
\begin{aligned}
\nabla\mathbf{V} = & \hat{e}_r\otimes\frac{\partial(v_r\hat{e}_r)}{\partial r}+\hat{e}_r\otimes\frac{\partial(v_\theta\hat{e}_\theta)}{\partial r}+\hat{e}_r\otimes\frac{\partial(v_z\hat{e}_z)}{\partial r}+ \\
& \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\hat{e}_\theta\otimes\hat{e}_r+\hat{e}_\theta\otimes v_r\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\hat{e}_\theta\otimes\hat{e}_\theta+\hat{e}_\theta\otimes v_\theta\frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta}+\hat{e}_\theta\otimes\frac{1}{r}\frac{\partial(v_z\hat{e}_z)}{\partial\theta}+ \\
& \hat{e}_z\otimes\frac{\partial(v_r\hat{e}_r)}{\partial z}+\hat{e}_z\otimes\frac{\partial(v_\theta\hat{e}_\theta)}{\partial z}+\hat{e}_z\otimes\frac{\partial(v_z\hat{e}_z)}{\partial z}
\end{aligned}
\qquad (۴۲)
$$

ادامه اثبات: با استفاده از رابطه (۸) برای مشتق بردار یکه ها، رابطه (۴۲) به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\nabla\mathbf{V} = \hat{e}_r \otimes \frac{\partial(v_r\hat{e}_r)}{\partial r} + \hat{e}_r \otimes \frac{\partial(v_\theta\hat{e}_\theta)}{\partial r} + \hat{e}_r \otimes \frac{\partial(v_z\hat{e}_z)}{\partial r} +$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_r + \frac{v_r}{r}\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_\theta - \frac{v_\theta}{r}\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_r + \hat{e}_\theta \otimes \frac{1}{r}\frac{\partial\left(v_z\hat{e}_z\right)}{\partial\theta} + \qquad (۴۳)$$

$$\hat{e}_z \otimes \frac{\partial(v_r\hat{e}_r)}{\partial z} + \hat{e}_z \otimes \frac{\partial(v_\theta\hat{e}_\theta)}{\partial z} + \hat{e}_z \otimes \frac{\partial(v_z\hat{e}_z)}{\partial z}$$

می توان معادله فوق را به شکل زیر مرتب نمود:

$$\nabla\mathbf{V} = \frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{e}_r \otimes \hat{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{e}_r \otimes \hat{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial r}\hat{e}_r \otimes \hat{e}_z +$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r}\right)\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right)\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_z \qquad (۴۴)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z}\hat{e}_z \otimes \hat{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\hat{e}_z \otimes \hat{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z}\hat{e}_z \otimes \hat{e}_z$$

ادامه اثبات: در نهایت برای گرادیان سرعت داریم:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{\partial v_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial z} & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (۴۵)$$

شایان ذکر است که تانسور نرخ برش نیز از رابطه $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T$ قابل محاسبه است. لذا با رابطه بدست آمده برای گرادیان سرعت (رابطه (۴۵))، تانسور نرخ برش به شکل زیر محاسبه می شود (بایستی توجه داشت که تانسور نرخ برش متقارن است):

$$\dot{\gamma}_{rr} = 2\frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \dot{\gamma}_{\theta\theta} = 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right), \qquad \dot{\gamma}_{zz} = 2\frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$\dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}, \qquad \dot{\gamma}_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \qquad \dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \qquad (۴۶)$$

در نهایت از رابطه (۴۶) و فرمولاسیون سیال نیوتنی ($\boldsymbol{\tau} = \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}}$) می توان مولفه های تانسور تنش را بدست آورد و با قرار دادن آن در معادلات (۳۰) تا (۳۲)، لاپلاسین سرعت بدست می آید. حال با یافتن کلیه ترمهای معادله (۱۸)، می توان معادله مومنتوم در دستگاه مختصات استوانه ای را استخراج نمود.

Continuity:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

Convective time derivative:

$$\mathbf{V}\cdot\nabla = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Laplacian operator:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

The r-momentum equation:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)v_r - \frac{1}{r}v_\theta^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

The θ-momentum equation:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)v_\theta + \frac{1}{r}v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \nu\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

The z-momentum equation:

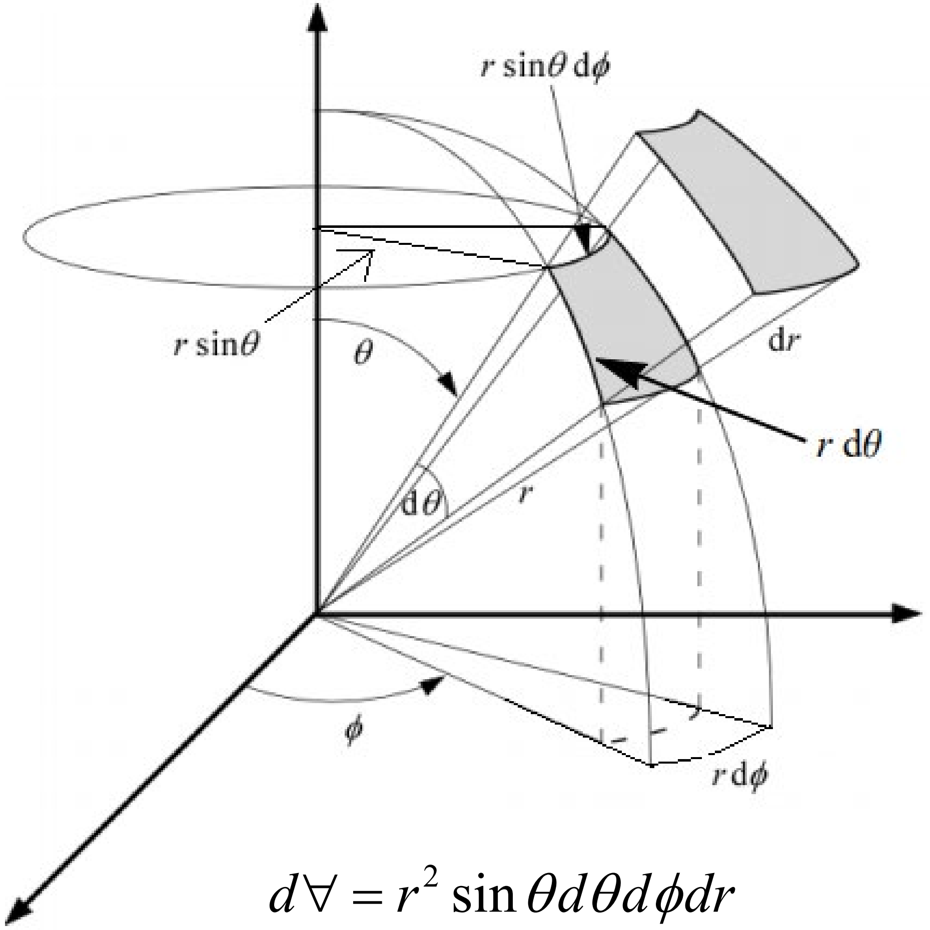
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu\nabla^2 v_z$$

معادلات ناویراستوکس جریان تراکم ناپذیر در دستگاه مختصات استوانه ای

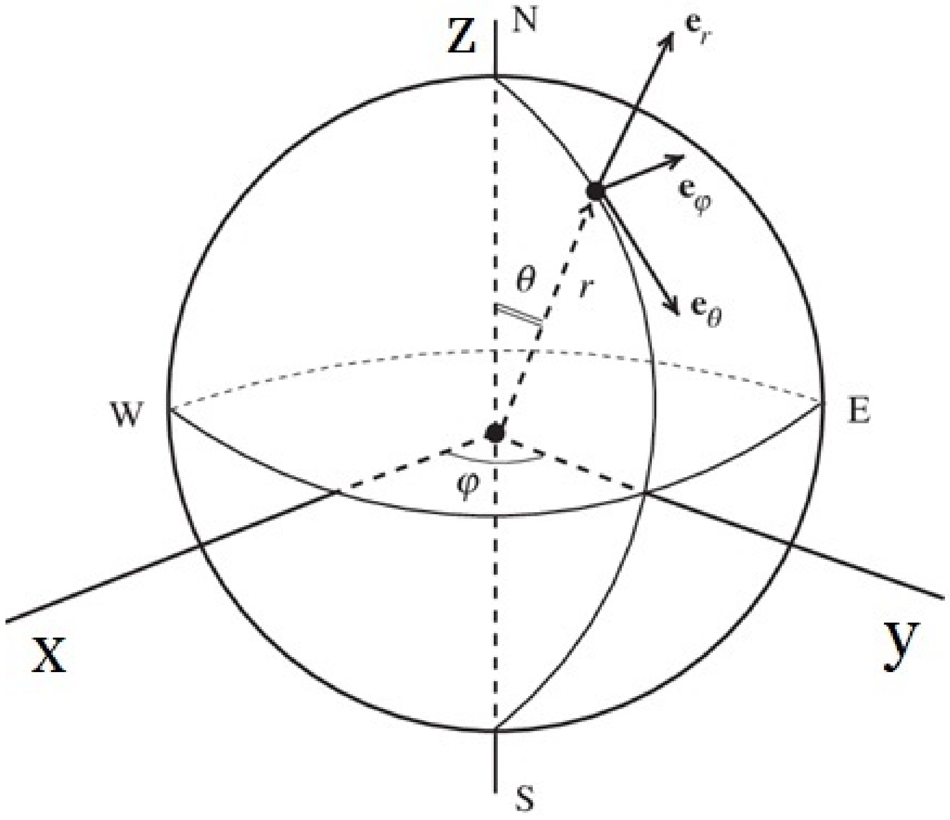
معادلات ناویراستوکس در دستگاه مختصات کروی

به طور مشابه، استخراج معادلات ناویراستوکس در دستگاه مختصات کروی نیز به دو روش المان گیری و یا محاسبه عملگرها در مختصات مذکور امکان پذیر است. روابط مربوط به تبدیل این مختصات به مختصات کارتزین به شرح زیر است:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \qquad y = r \sin\theta \sin\phi \qquad z = r\cos\theta$$



$$d\forall = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$



معادلات ناویراستوکس جریان تراکم ناپذیر در دستگاه مختصات کروی

Continuity:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(v_\phi) = 0$$

Time derivative following the particle:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Laplacian operator:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

r momentum:

$$\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{1}{r}\left(v_\theta^2 + v_\phi^2\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{2v_\theta\cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)$$

θ momentum:

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{1}{r}\left(v_r v_\theta - v_\phi^2\cot\theta\right) = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + g_\theta + \nu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)$$

ϕ momentum:

$$\frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{1}{r}\left(v_r v_\phi + v_\theta v_\phi\cot\theta\right) = -\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi} + g_\phi + \nu\left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)$$


The End